ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

DURÉE : 4 heures

Option M

Les correcteurs tiendront largement compte de la rigueur des raisonnements et du soin que les candidats auront apporté à la rédaction et à la présentation de leur travail.

Dans tout le problème on appellera « fonction » toute application du corps R des nombres réels dans lui-même et on notera : $\mathcal{F}$ l'ensemble de ces fonctions, $\mathcal{C}^0$ l'ensemble des fonctions continues, $\mathcal{C}^n$ (n entier naturel non nul) l'ensemble des fonctions ayant n dérivées successives continues, $\mathcal{C}^\infty$ l'ensemble des fonctions ayant toutes leurs dérivées successives continues, la continuité étant entendue en tout point de R. On appellera support de la fonction f l'ensemble des nombres réels x vérifiant $f(x) \neq 0$. R est supposé muni de sa topologie naturelle, c'est-à-dire que R est un R-espace vectoriel normé, la norme d'un nombre réel étant sa valeur absolue. La notation Exp t désigne e^t, e étant la base des logarithmes népériens.

I

I.1. Montrer que le support de tout élément de $\mathcal{C}^0$ est un ouvert.

I.2. Soit E l'ensemble des éléments de $\mathcal{C}^\infty$ à supports bornés. Montrer que E est un sous-espace du R-espace vectoriel $\mathcal{F}$.

I.3. Soient f un élément de $\mathcal{C}^\infty$, à valeurs positives $\big((\forall x \in \mathrm{R})\ f(x) \geqslant 0\big)$, et a un nombre réel strictement positif tel que le segment $[-a, a]$ soit inclus dans le support de f.

On pose :

$$\begin{cases} \text{pour tout } x \in]-a, a[, \quad g(x) = \mathrm{Exp}\left(\dfrac{f(x)}{x^2 - a^2}\right) \\ \text{pour tout } x \notin]-a, a[, \quad g(x) = 0 \end{cases}$$

On demande de montrer que la fonction g appartient à E : une partie de la démonstration consistera à établir que

$$\big(\forall x \in]-a, a[\big)\ g^{(n)}(x) = \frac{\varphi_n(x)}{(x^2 - a^2)^{2n}}\ \mathrm{Exp}\left(\frac{f(x)}{x^2 - a^2}\right),$$

φ_n étant élément de $\mathcal{C}^\infty$; on explicitera la relation entre $\varphi_{n-1}(x)$ et $\varphi_n(x)$.

I.4. Montrer que le R-espace vectoriel E n'est pas de dimension finie (on pourra considérer une suite convenablement choisie de fonctions définies comme au I.3.).

I.5. Soient f un élément de E et β la borne supérieure du support, supposé non vide, de f.

I.5.*a*. Montrer que β est aussi la borne supérieure du support de la dérivée f' de f.

I.5.*b*. Quelle est la courbure de la courbe plane d'équation $y = f(x)$ en son point d'abscisse β, le repère étant orthonormé?

I.5.*c*. Montrer que toutes les dérivées successives d'un élément de E sont aussi éléments de E.

I.5.*d*. Quel est le développement limité à l'ordre n (entier naturel) de $f(x)$, pour x voisin de β ?

I.6. Rappeler rapidement pourquoi l'addition et la multiplication dans $\mathcal{F}$ induisent sur $\mathcal{C}^\infty$ une structure d'anneau. Montrer que E est un idéal de cet anneau $\mathcal{C}^\infty$.

II

On note E* le dual du R-espace vectoriel E défini au I.2. ; à tout couple $(\varphi, f) \in \mathrm{E}^* \times \mathrm{E}$ on associe donc le nombre réel $\varphi(f)$, qu'on notera selon l'usage $< \varphi, f >$.

II.1. Si F est une fonction dont le support est inclus dans le segment $[a, b]$ $(a \leqslant b)$ et si F est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$, on posera : $\int_a^b \mathrm{F}(x)\,dx = \int_{\mathrm{R}} \mathrm{F}$. Montrer qu'en particulier on peut ainsi définir $\int_{\mathrm{R}} f$ pour tout élément f de E et que l'application I de E dans R définie par $\mathrm{I}(f) = \int_{\mathrm{R}} f$ est un élément de E*.

II.2. Soit g un élément de $\mathcal{C}^0$; montrer l'existence de $\int_{\mathrm{R}} gf$ (voir II.1.) pour tout élément f de E; on posera $\bar{g}(f) = \int_{\mathrm{R}} gf$. Montrer que $\bar{g}$ appartient à E*.

On note $\overline{\mathcal{C}^0}$ l'ensemble décrit par $\bar{g}$ lorsque g décrit $\mathcal{C}^0$. Montrer que $\overline{\mathcal{C}^0}$ est un sous-espace du R-espace vectoriel E*.

II.3. Soit h une fonction ayant pour seules discontinuités un nombre fini de discontinuités de 1re espèce sur tout intervalle borné. Montrer l'existence de $\int_{\mathrm{R}} hf$ pour tout élément f de E; on posera $\bar{h}(f) = \int_{\mathrm{R}} hf$. Montrer que $\bar{h}$ appartient à E*.

II.4. Soit φ un élément de E*; on note D φ l'application de E dans R définie par : $(\forall f \in \mathrm{E})\ \big((\mathrm{D}\varphi)(f) = - < \varphi, f' >\big)$, f' désignant la dérivée de f.

.../...

M 124 E.S.I.M. 1978

II.4.*a*. Montrer que $D\varphi$ est élément de E^*, ce qui justifiera la notation : $(D\varphi)(f) = <D\varphi, f>$.

II.4.*b*. Montrer que D est un endomorphisme du R-espace vectoriel E^*.

II.4.*c*. Qu'est-ce que DI, I étant l'application définie au II.1.?

II.4.*d*. Soit g un élément de $\mathcal{C}^1$; trouver $g_1 \in \mathcal{C}^0$ telle que $D\bar{g} = \bar{g}_1$.

II.4.*e*. On pose $D \circ D = D^2$ et par récurrence $D \circ D^{n-1} = D^n$; si g appartient à $\mathcal{C}^n$, que peut-on dire de $D^n\bar{g}$?

II.5. Soit a un nombre réel. On note δ_a l'application de E dans R définie par :
$(\forall f \in E)\ \left(\delta_a(f) = f(a)\right)$ et H_a la fonction définie par :

$$(\forall x \in R)\ \begin{cases} x < a \Rightarrow H_a(x) = 0 \\ x \geqslant a \Rightarrow H_a(x) = 1 \end{cases}$$

Relation entre $D\,\overline{H_a}$ et δ_a ?

II.6. Soient φ un élément de E^*, f un élément de E, n un entier naturel non nul. Trouver $u \in E$ vérifiant $<\varphi, u> = <D^n\varphi, f>$.

Que vaut $<D^n\,\overline{H_a}, f>$?

II.7. On pose :

$$(\forall x \in R)\ \begin{cases} x \in]-1,1[\Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{(1-x^2)^3}\ \mathrm{Exp}\left(\dfrac{1}{x^2-1}\right) \\ x \notin]-1,1[\Rightarrow f(x) = 0 \end{cases}$$

$$(\forall x \in R)\ \begin{cases} x \notin \{-1,1\} \Rightarrow g(x) = |x|(1-x^2)\sin\dfrac{1}{1-x^2} \\ g(-1) = g(1) = 0 \end{cases}$$

Montrer que f appartient à E et que g appartient à $\mathcal{C}^0$.

Calculer $<\bar{g}, f>$ et $<D\bar{g}, f>$.

III

III.1. Montrer que l'ensemble E′ des fonctions v éléments de E telles que $\int_R v = 0$ (voir II.1) est un sous-espace vectoriel de E, et que tout sous-espace supplémentaire de E′ dans E est de dimension 1 (autrement dit, que la codimension de E′ est 1).

III.2. **k étant un nombre réel, on pose :**

$$(\forall x \in R)\ \begin{cases} x \in]-1,1[\Rightarrow u_k(x) = k\ \mathrm{Exp}\left(\dfrac{1}{x^2-1}\right) \\ x \notin]-1,1[\Rightarrow u_k(x) = 0 \end{cases}$$

Montrer l'existence d'un unique réel k_1 tel que $\int_R u_{k_1} = 1$ et que u_{k_1} engendre un sous-espace vectoriel E″ supplémentaire de E′ dans E.

Toute fonction f élément de E peut alors se décomposer sous la forme : $f = \lambda u_{k_1} + v$, le couple $(\lambda, v) \in R \times E'$ étant unique.

Quelle est la valeur de λ?

III.3.

III.3.*a*. Montrer que tout élément v de E′ est la dérivée d'un unique élément de E, qu'on notera $\int v$.

III.3.*b*. Soit φ un élément de E^*. On pose :

$$\begin{cases} \text{pour tout } v \in E',\ \psi(v) = -<\varphi, \int v> \\ \text{pour tout } u \in E'',\ \theta(u) = 0 \end{cases}$$

Montrer l'existence et l'unicité d'une forme linéaire $\Phi \in E^*$ dont les restrictions à E′ et E″ sont respectivement ψ et θ. Que vaut $D\Phi$?

III.4.

III.4.*a*. Montrer qu'à tout couple $(\varphi, \mu) \in E^* \times R$, on peut associer une unique forme linéaire $F \in E^*$ telle que $\begin{cases} DF = \varphi \\ <F, u_{k_1}> = \mu \end{cases}$

III.4.*b*. *Cas particulier* :

Déterminer F pour $\varphi = \overline{H_0}$ (voir II.5.) et $\mu = 0$

(On cherchera $j \in \mathcal{C}^0$ telle que les restrictions à E′ de F et J coïncident).

-FIN-

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail